Exercice 1. Soit V un espace vectoriel complexe et $h : V\times V \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne.

1. Montrer que si h est définie positive (i.e. h est un produit scalaire hermitien), alors pour tous $x, y \in V$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a
$$\|\alpha\, x + \beta\, y\|^2 = |\alpha|^2\|x\|^2 + |\beta|^2\|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\left(\alpha\overline{\beta}\, h(x,y)\right).$$
2. On note $g = \mathrm{Re}\,(h)\ : V \times V \to \mathbb{R}$ la partie réelle de h et $\omega = \mathrm{Im}(h)\ : V \times V \to \mathbb{R}$ sa partie imaginaire, en sorte que
$$h(x,y) = g(x,y) + i\,\omega(x,y).$$
Montrer que g est symétrique et ω est antisymétrique.
3. Montrer que h est un produit scalaire hermitien si et seulement si $g = \mathrm{Re}\,(h)$ est un produit scalaire au sens classique, où l'on regarde V comme un espace vectoriel réel.

Exercice 2. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un espace vectoriel hermitien. Puis démontrer cette inégalité en utilisant la formule du point (a) de l'exercice précédent.

Indication. Poser $\alpha = \overline{\langle x, y\rangle}$ et $\beta = -\|x\|^2$ et calculer.

Exercice 3. On appelle *matrice adjointe* d'une matrice complexe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ la transposée de sa conjuguée et on la note $A^* = \overline{A}^t$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^*$ s'appelle une *matrice hermitienne* (ou une matrice *auto-adjointe*). On notera $\mathscr{H}_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ hermitiennes.

1. Prouver que $\mathscr{H}_n$ est un espace vectoriel réel.
2. Prouver que $\mathscr{H}_n$ n'est pas un espace vectoriel complexe.
3. Quelle est la dimension de $\mathscr{H}_n$ comme espace vectoriel réel.
4. Prouver que les matrices suivantes
$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
forment une base de $\mathscr{H}_2$.

Remark. Les matrices σ_k sont les *matrices de Pauli* ; elles apparaissent dans l'étude du spin des particules en mécanique quantique

---

Exercice 4. Soit T un opérateur d'un espace hermitien V. Démontrer les affirmations suivantes :

1. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est la matrice de l'opérateur T dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$, alors la matrice transposée-conjuguée $\overline{A}^t$ est la matrice de l'opérateur T^* dans la même base.
2. Si λ est valeur propre de T, alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de l'opérateur adjoint T^*.

Exercice 5.

1. Un opérateur T d'un espace hermitien V est dit *normal* s'il commute avec son adjoint : $TT^* = T^*T$ (par exemple tout opérateur autoadjoint est normal). Montrer que T est normal si et seulement si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ pour tous $x, y \in V$.
2. Montrer que si T et S sont des opérateurs normaux qui commutent, i.e. $ST = TS$, alors $(T + S^*)$ est un opérateur normal.
3. Montrer que si T est normal et v est un vecteur propre de T, alors v est aussi un vecteur propre de T^*. Quelle est la valeur propre correspondante ? (Indication : montrer que $(T - \lambda I_V)$ est normal, puis utiliser le point (a).)
4. Prouver que si $v, w \in V$ sont des vecteurs propres de T associés à des valeurs propres distinctes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $v \perp w$, i.e.$\langle v, w\rangle = 0$.

Exercice 6. (a) A quelles conditions sur $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est-elle normale ?

(b) Les matrices normales de taille 2×2 forment-elles un espace vectoriel ? (Justifier votre réponse).

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$.

1. Montrer que pour tout opérateur linéaire, $T : V \to V$, on a $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)^\perp$.
2. Montrer que si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel invariant par rapport à l'opérateur T, alors $W^\perp \subset V$ est invariant par rapport à l'adjoint T^*.

Exercice 8. (a) Un opérateur $U : V \to V$ d'un espace vectoriel hermitien V est dit *unitaire* si $\|Ux\| = \|x\|$ pour tout $x \in V$. Montrer que U est unitaire si et seulement si $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.

(b) Montrer que l'opérateur $U : V \to V$ est unitaire si et seulement si $U^*U = I_V$.

(c) Montrer que tout opérateur unitaire est normal.

(d) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre d'un opérateur unitaire $U : V \to V$, alors $|\lambda| = 1$.

(e) En utilisant le théorème spectral, prouver que si $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est un opérateur unitaire, alors il existe une base orthonormée de V dans laquelle la matrice de U s'écrit

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

où les θ_j sont des nombres réels.